A proposito della trasmissione del calore

(e tempo di raffreddamento di una birretta)

a cura di Giancarlo Buccella

Il **calore** è una forma di **energia**, così come il **lavoro**, che si trasferisce tra due corpi o sistemi a causa di una differenza di temperatura. Questo trasferimento avviene sempre spontaneamente dal corpo più caldo (a temperatura più alta) verso il corpo più freddo (a temperatura più bassa), fino al raggiungimento di un equilibrio termico.

1. Calore

Definizione: È l'energia che viene trasferita tra due corpi o sistemi a causa di una differenza di temperatura.
Modalità di trasferimento: Avviene sempre da un sistema a temperatura più alta ad uno Una compressione è una forza di tipo meccanico a temperatura più bassa, secondo il secondo principio della termodinamica.
Esempio: Riscaldare una pentola su un fornello. L'energia viene trasferita sotto forma di calore dal fornello (più caldo) alla pentola e successivamente al cibo al suo interno.
Effetto: Il trasferimento di calore aumenta o diminuisce l'energia interna del sistema, modificando spesso la sua temperatura o il suo stato (ad esempio, da solido a liquido).
Dipendenza: Si verifica solo se esiste una differenza di temperatura.

2. Lavoro

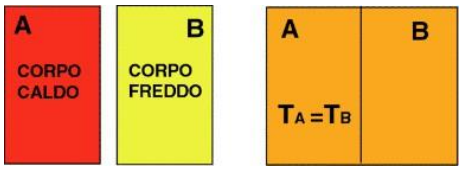
Definizione: È l'energia trasferita al sistema dall'esterno dal sistema all'esterno attraverso forze meccaniche (movimento, compressione, espansione, ecc.).
Modalità di trasferimento: Avviene tramite l'azione di una forza.
Esempio: Sollevare un oggetto contro la forza di gravità, comprimere un gas in un cilindro mediante un pistone.
Effetto: Il lavoro può cambiare l'energia interna del sistema o produrre movimento (energia cinetica).
Dipendenza: Richiede l'applicazione di una forza e uno spostamento.

La **trasmissione del calore** (o **scambio termico**) è un fenomeno di trasporto in cui è coinvolta energia termica tra due sistemi, che è causato da una differenza di temperatura tra i due sistemi, da quello caldo a quello freddo.

Lo studio dei fenomeni di trasmissione del calore riguarda tutti quei processi fisici nei quali una certa quantità di energia termica è trasferita da un sistema ad un altro a causa di una differenza di temperatura. Tali processi avvengono in accordo con i principi della termodinamica: quindi per il primo principio, l'energia termica ceduta da un sistema deve essere uguale a quella ricevuta dall'altro e il calore, come afferma il secondo principio, passa dal corpo più caldo a quello più freddo. Tuttavia tra termodinamica e trasmissione del calore c'è una fondamentale differenza. Infatti in ambito termodinamico è irrilevante il tempo necessario affinché un dato processo sia ultimato, in quanto ora, l'oggetto di studio della termodinamica sono i sistemi in equilibrio e le grandezze fisiche in gioco sono considerate indipendenti dal tempo. Nella trasmissione del calore, chiamata anche Termocinetica, ciò che conta è la rapidità in cui avviene il processo di scambio termico. Riveste quindi notevole importanza la quantità di calore scambiata nell'unità di tempo che prende il nome di potenza termica. Essa viene indicata con il simbolo $\dot{Q}$ o semplicemente P (dal contesto si capisce che questa potenza si riferisce a scambi termici) e poiché è una potenza, nel sistema internazionale si misura in watt. Riassumendo, lo scopo della Termocinetica è studiare la velocità di scambio del calore invece della quantità assoluta trasferita in un tempo infinito, come avviene in Termodinamica. La trasmissione del calore avviene spontaneamente solo da un corpo caldo ad un corpo freddo, fino a che i due corpi raggiungono la stessa temperatura, detta di equilibrio termico. Il corpo caldo comunica a quello freddo parte della sua energia termica intensificandone l'agitazione molecolare. La propagazione del calore può avvenire per conduzione, convezione o per irraggiamento

Conduzione

Il trasferimento per conduzione avviene tra corpi che sono a contatto, o tra parti di uno stesso corpo che si trovano a temperature diverse. Esso è causato dal trasferimento di energia cinetica da una molecola a quella adiacente che possiede una velocità di vibrazione minore. Poiché la velocità di vibrazione delle particelle è direttamente proporzionale alla temperatura, il corpo caldo cede energia a quello freddo, aumentandone la temperatura, finché non è raggiunto l'equilibrio termico. Prendiamo ad esempio, come indicato in figura 1a, due corpi a temperature diverse. Una volta posti in contatto, per conduzione il calore fluisce dal corpo più caldo a quello più freddo, finché essi raggiungono una temperatura d'equilibrio

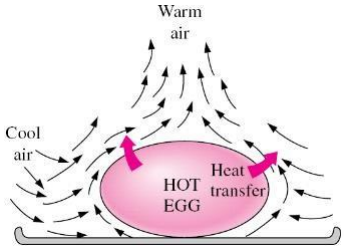


Convezione

La convezione è uno scambio termico tra un solido ed un fluido in movimento che ne lambisce la superficie. La convezione ha luogo quando uno dei due corpi interessati dallo scambio termico è un fluido.

Quando una porzione di fluido si riscalda (ad esempio, vicino a una superficie calda), si espande, riducendo la sua densità. La porzione più calda e meno densa del fluido tende a salire. La porzione più fredda, più densa, scende verso il basso per occupare lo spazio lasciato libero. Questo movimento crea un moto circolatorio nel fluido, chiamato moto convettivo. Tale processo continua finché esiste una differenza di temperatura. In questi casi le forze gravitazionali provocano quindi continui movimenti delle particelle del fluido, con conseguente miscelazione, favorendo pertanto la trasmissione del calore dalle particelle più calde a quelle più fredde. Questo fenomeno prende il nome di convezione naturale.

Quando invece i movimenti delle particelle del fluido sono imposti essenzialmente da cause meccaniche (una pompa, nel caso di circolazione dell'acqua, o semplicemente l'azione del vento), il fenomeno prende il nome di convezione forzata.

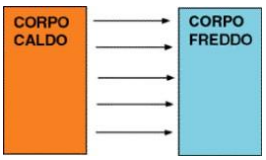


Irraggiamento

Nell'irraggiamento il calore viene scambiato mediante emissione e assorbimento di radiazione elettromagnetica (principalmente in ambito terrestre sotto forma di raggi infrarossi).

- Emissione di radiazione: tutti i corpi con una temperatura superiore allo zero assoluto emettono energia sotto forma di onde elettromagnetiche. La quantità di radiazione emessa dipende dalla temperatura del corpo e dalla sua emissività (quanto bene un corpo emette radiazione, il corpo che emette più di tutti viene detto corpo nero ed ha una emissività pari ad uno, ossia emette tutta la radiazione che riceve).
- Trasferimento dell'energia: l'energia termica si propaga nello spazio sotto forma di radiazioni elettromagnetiche. Queste onde non richiedono un mezzo fisico per propagarsi, quindi l'irraggiamento avviene anche attraverso il vuoto.
- Assorbimento: quando le onde elettromagnetiche incontrano un altro corpo, una parte dell'energia viene assorbita, trasformandosi in calore. La quantità assorbita dipende dalle proprietà del materiale (colore, struttura, emissività) e dall'intensità della radiazione.

Il calore così scambiato aumenta molto rapidamente con la differenza di temperatura. A differenza delle altre due modalità di scambio termico, l'irraggiamento non richiede la presenza di un mezzo perché vi sia trasmissione di energia. La radiazione elettromagnetica che opera da "trasmettitore" di calore, è generata dall'eccitazione termica della superficie del corpo, a sua volta causata dallo stato energetico degli atomi che la costituiscono, ed è emessa in tutte le direzioni.



Resistenza termica

Le considerazioni sulle analogie tra i fenomeni di scambio di calore ed i circuiti elettrici, e in particolare l'esatta corrispondenza tra potenza termica e corrente elettrica, sono del tutto confermate dalla formulazione di una legge fisica chiamata equivalente termico della Legge di Ohm. Essa afferma che la quantità di calore scambiata nell'unità di tempo, ossia la potenza termica, è direttamente proporzionale alla differenza di temperatura che causa lo scambio di calore ed è inversamente proporzionale ad una grandezza che, per analogia con i fenomeni elettrici, viene detta *resistenza termica*.

$$I = \frac{\Delta V}{R_{elettrica}} \quad \rightarrow \quad P = \frac{\Delta T}{R_{termica}}$$

Dove ΔT è la differenza di temperatura (positiva) in Kelvin ed R rappresenta la resistenza termica del materiale.
La **resistenza termica** è una grandezza fisica che misura la capacità di un materiale o di un sistema di opporsi al trasferimento di calore. In altre parole, rappresenta l'efficienza con cui un materiale o una struttura limita il flusso di energia termica attraverso di esso.

$$R = \frac{\Delta T}{P}$$

L'analogia che collega tra loro lo studio dei fenomeni termici e di quelli elettrici trae origine dalla similitudine esistente tra le equazioni che li governano: si ha infatti che formalmente alla legge di Fourier corrisponde la legge di Ohm e all'equazione di Fourier l'equazione della distribuzione del potenziale elettrico. La formale eguaglianza tra le equazioni consente di utilizzare alcuni risultati analitici propri della teoria dell'elettricità anche per lo studio della trasmissione del calore. Un tipico esempio si ha nel concetto di resistenza termica che fa sì che, analogamente a quelle elettriche, le resistenze termiche in serie si sommino.

L'esistenza di una tale analogia consente quindi di realizzare modelli elettrici per mezzo dei quali è possibile prevedere il comportamento termico di strutture complesse, che difficilmente potrebbero essere studiate analiticamente.
Nel caso di più strati la R sarà quella totale R_{TOT} andando a distinguere il caso di strati posti in serie da quelli posti in parallelo, Avendosi
Strati in serie $R_{TOT} = R_1 + R_2 + ... + R_n$
Strati in parallelo $\frac{1}{R_{TOT}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + ... \frac{1}{R_n}$
Se il sistema è di tipo misto la resistenza totale è $R_{TOT} = R_{serie} + R_{parallelo}$.

Approfondiamo ora la teoria circa le tre modalità di trasmissione del calore.

Conduzione

La conduzione termica è un fenomeno caratteristico dei solidi, benché avvenga anche nei fluidi.
L'esperienza mostra che la capacità di trasmissione del calore è una caratteristica intrinseca ai vari corpi e tale capacità descritta attraverso un parametro detto conducibilità termica (o conduttività termica) e viene indicata con la lettera k (o λ) e si misura in W/mK. Ad esempio l'alluminio che è un buon conduttore, ha un valore di k = 217 W/mK mentre il legno, che è un cattivo conduttore ha un valore circa mille volte inferiore k = 0.10 W/mK.
Ecco una tabella del valore di k per alcuni materiali.

Sostanza	*k (W/mK)*
Acciaio inox	17
Acciaio laminato	52
Acqua distillata	0.6
Alluminio laminato	290
Argento	460
Aria secca	0.026
Carta	0.15
Diamante	1600
Ghiaccio	2.2÷2.5
Lana di pecora	0.04
Mattoni (pieni, forati)	0.25÷0.90
Legno	0.15÷0.27
Neve (appena caduta)	0.06
Neve (compatta)	0.70
Oro	320
Plexiglass	0.19
Rame	390
Vetro cellulare (tipo particolare di vetro)	0.04
Vetro laminato	1

Equazione della conduzione del calore in forma generale:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T + \frac{q}{\rho c_p}$$

α è la diffusività termica $\alpha = \frac{k}{\rho c_p}$, ρ è la densità del materiale attraverso cui avviene la conduzione, k è il coefficiente di conducibilità termica e c_p è il calore specifico a pressione costante, mentre q è la generazione di calore (interna al sistema) volumetrica. Nel prosieguo discuteremo solo il caso in cui q = 0.

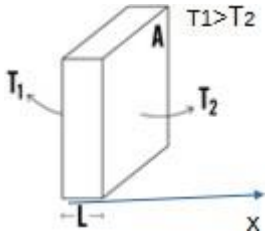
Riferendoci al caso di stazionarietà (quando il campo termico è indipendente dal tempo si dice che la conduzione avviene in *regime stazionario*, mentre se la temperatura è funzione anche del tempo il regime si dice *transitorio*), ed al caso in cui non vi sia generazione di calore interna, l'equazione diventa (equazione di Laplace):

$$\nabla^2 T = 0$$

La **legge fenomenologica di Fourier** permette di calcolare la quantità di calore trasmessa per conduzione all'interno del corpo stesso o fra due o più corpi a contatto fra loro.

Nel caso semplice di conduzione lineare e stazionaria e sezione del solido costante S, il calore trasferito (dQ), nell'unità di tempo (dt), cioè la potenza termica trasmessa, è dato dal prodotto della conducibilità k per la sezione trasversale alla direzione di propagazione S, per la variazione di temperatura (dT) della direzione di propagazione nel solido.

$$\frac{dQ}{dt} \equiv P = -k\,S\,\frac{\partial T}{\partial x} \quad \text{(W)} \quad (1)$$



Questa legge poneva per la prima volta, introducendo (come l'esperienza mostrava) la presenza del segno negativo al secondo membro, la presenza di una freccia del tempo nella trasmissione del calore (da temperatura maggiore verso temperatura minore e mai viceversa, spontaneamente!).
Successivamente molte leggi furono formulate sulla stessa falsariga del postulato di Fourier, ad esempio la Legge di Fick per la diffusione, la legge di Ampère per la corrente elettrica, la legge di Bernoulli per il moto dei fluidi reali. Tutte queste leggi avevano in comune il legame funzionale fra un flusso (di calore, di massa, di corrente, ...) con una causa prima e cioè una differenza di potenziale (ΔT, ΔV, ΔC, Δp, ...).
Per variazioni finite la legge diventa:
Integrando la (1) su x, in riferimento alla figura di cui sopra, si ha

$$\int_{x_1}^{x_2} P\,dx = -\int_{T_1}^{T_2} k\,S\,dT: \quad P(x_2 - x_1) = -kS(T_2 - T_1) = kS(T_1 - T_2)$$

se indichiamo lo spessore della lastra $x_2 - x_1 = L$ si ha la seguente legge di trasmissione del calore in regime stazionario

$$P = k\,S\,\frac{(T_1 - T_2)}{L} \quad (T_1 > T_2) \quad (2)$$

E' utile anche introdurre il flusso per unità di superficie che viene chiamato densità di flusso o intensità di flusso, o semplicemente intensità**.** Nel caso specifico del trasferimento di calore, viene definito come densità di flusso termico ed è rappresentato con il simbolo q, mentre per le onde si usa parlare di intensità, con simbolo I, esso rappresenta quanta energia nell'unità dio tempo attraversa una superficie unitaria posta perpendicolarmente alla direzione di **q** (q è in fatti un vettore, come si vede dalla (4).).
Dalla (1) si ha che la densità di flusso termico In forma differenziale è

$$q = \frac{P}{S} = -k\,\frac{dT}{dx} \qquad (3)$$

Nel caso in cui la temperatura dipenda dalle tre coordinate spaziali la legge di Fourier è la seguente:

$$\boldsymbol{q} = -k\nabla T \qquad (4)$$

Facciamo vedere come la (4) sia effettivamente una soluzione dell'equazione di Laplace scritta sopra. Infatti in condizioni di stazionarietà la divergenza di P deve essere nulla al fine di soddisfare la conservazione dell'energia (non vi deve essere, in altre parole, nessun accumulo di energia nel corpo considerato)

$$\nabla \cdot q = 0$$

Sostituendo in questa equazione la (4) si ha

$$\nabla \cdot (-k\nabla T) = 0$$

Se k è costante, come avviene per materiali omogenei l'equazione si semplifica nel seguente modo

$$-k\nabla^2 T = 0$$

dividendo per – k (assumendo k diverso da zero) si arriva all'equazione di Laplace

$$\nabla^2 T = 0$$

Mostrando così come effettivamente la (4) sia una soluzione dell'equazione di Laplace.

Dalla (2) possiamo ricavare l'espressione per la densità di flusso:

$$q = \frac{k}{L}(T_1 - T_2) \quad (T_1 > T_2) \qquad (5)$$

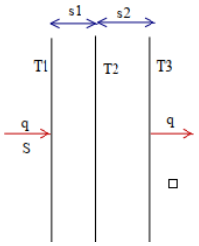
Ricordando la definizione data sopra di resistenza termica, la (4) si può scrivere nel seguente modo

$$q = \frac{(T_1 - T_2)}{R}$$

Si definisce allora la resistenza termica per conduzione con la seguente relazione

$$R_{cond} = \frac{L}{kS} \; K/W \qquad (6)$$

Nel caso di due strati a contatto, di spessore s_1 ed s_2, come in figura,



la (5) diventa

$$q = \frac{(T_1 - T_3)}{\frac{s_1}{k_1} + \frac{s_2}{k_2}} = \frac{(T_1 - T_3)}{R_1 + R_2}$$

Nel caso di più strati la relazione diventa

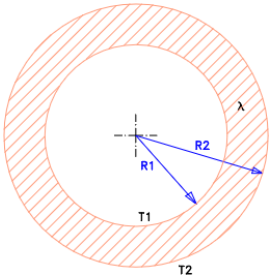
$$q = \frac{(T_1 - T_3)}{\sum_{i=1}^{n} R_i}$$

Nel caso di una conduzione con geometria cilindrica, applicando la (4), in coordinate cilindriche, si ha

$$P = \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{2\pi kL}\log\frac{R}{r}} \quad (T_1 > T_2) \qquad (6)$$

Dove L è l'altezza del cilindro, r il raggio interno ed R quello esterno e k la conducibilità del materiale di cui è fatto il cilindro.

Nel caso di una conduzione con geometrica sferica (cava) legge di Fourier calcolata in coordinate sferiche porta alla seguente espressione della potenza termica

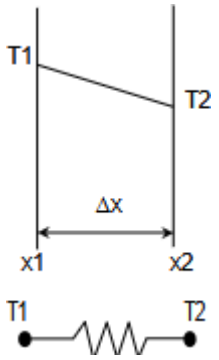


$$P = \frac{4\pi k(T_1 - T_2)}{\frac{1}{r} - \frac{1}{R}} \quad (T_1 > T_2) \qquad (7)$$

Alcuni esempi

1. Determinare il calore trasferito per conduzione (stazionario) attraverso una parete di 10 m^2 di mattoni o acciaio, cello spessore di 30 cm sottoposta da una differenza di temperatura di 20 °C. (Conducibilità mattoni k = 0.465 W/m2K, acciaio k = 45 W/mK).

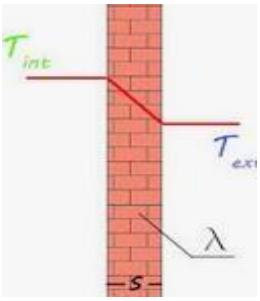
Si può pensare all'analogia elettrica, in cui la resistenza termica vale R = L/kS schematicamente:



$$R = \frac{L}{kS} = \frac{0.3}{0.465 \cdot 10} = 0.0645\, K/W$$

$$P_{mattoni} = \frac{\Delta T}{R} = \frac{20}{0.0645} = 310W$$

Si poteva anche applicare direttamente la (2)



Mattoni $P = 0.465 \cdot 10 \dfrac{20}{0.3} = 310W$

Acciaio $P = 45 \cdot 10 \dfrac{20}{0.3} = 30\, kW$

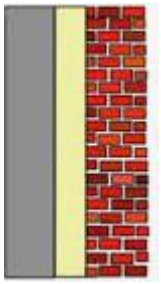
2. La parete di un forno è composta dai seguenti strati

Strato 1: k1 = 1.39 e s1 = 30 cm

Strato 2: k2 = 0.21 e s2 = 10 cm

Strato 3: k3 =0.70 e s3 = 20 cm

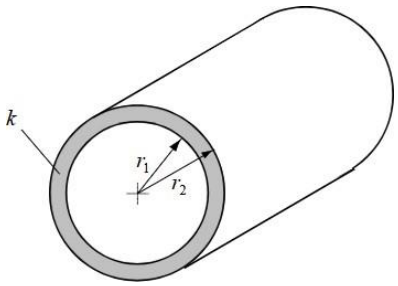
Determinare il calore disperso per unità di area vero l'esterno, con una differenza di temperatura di 400 °C.



Usando la relazione vista sopra si ha

$$q = \frac{(T_1 - T_3)}{\frac{s_1}{k_1} + \frac{s_2}{k_2} + \frac{s_3}{k_3}} = \frac{400}{\frac{0.3}{1.39} + \frac{0.1}{0.21} + \frac{0.2}{0.70}} = 409 W / m^2$$

3. Un cilindro di rame ha raggio interno di 1 cm ed esterno di 1.8 cm, la superficie interna e quella esterna sono mantenute rispettivamente a 305 K (32 °C) e 295 K (22 °C) e la conducibilità termica k varia linearmente con la temperatura secondo la legge $k = k_0 (1 + b T_m)$ dove $k_0 = 371.9$ W/mK e $b = -9.25 \times 10^{-5}$ K^{-1}. Valutare le perdite di calore per unità di lunghezza. Tm è la temperatura media.



Dalla (7)

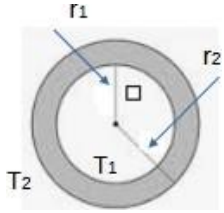
$$\frac{P}{L} = 2\pi k \frac{T_1 - T_2}{\log \frac{R}{r}} \quad (T_1 > T_2)$$

Con $k_m = k_0(1 + bT_m)$ essendo $T_m = (T_1+T_2)/2 = 300$ K si ha

$k_m = 371.9(1 - 9.25 \cdot 10^{-5} \cdot 300) = 361.6 W / mK$ quindi

$$\frac{P}{L} = 2\pi \cdot 362.6 \frac{305 - 295}{\log \frac{0.018}{0.010}} = 38.65 W / m$$

4. Una sfera cava è composta da un materiale con conducibilità termica k. Il raggio interno della sfera è r_1 = 0.05 m e il raggio esterno è r_2 = 0.10 m. La superficie interna della sfera cava è mantenuta a una temperatura costante T_1, = 400 K mentre la superficie esterna è mantenuta a T_2 = 300 K, sia k = 15 Wm^2K. Determinare la distribuzione della temperatura T(r) all'interno dello strato sferico in regime stazionario e calcolare il flusso termico totale (potenza) attraverso la sfera cava.



Occorre utilizzare l'equazione di Laplace in coordinate sferiche, tenendo conto che nella divergenza sopravvive solo il termine radiale

$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dT}{dr}\right)=0$ moltiplicando per r^2

$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dT}{dr}\right)=0 \quad \rightarrow \quad \left(r^2\frac{dT}{dr}\right)=C_1; \quad \frac{dT}{dr}=\frac{C_1}{r^2}$ integrando

$$T(r)=-\frac{C_1}{r}+C_2$$

Con C_1 e C_2 costanti di integrazione.

Dalle condizioni al contorno ricaviamo le due costanti

Sulla superficie esterna r = r_2 la temperatura vale $T(r_2) = T_2$, mentre su quella interna $T(r_1) = T_1$;

$$T(r_2)\equiv T_2=-\frac{C_1}{r_2}+C_2$$

$$T(r_1)\equiv T_1=-\frac{C_1}{r_1}+C_2$$

$$T_1-T_2=-\frac{C_1}{r_1}+\frac{C_1}{r_2}$$ da cui

$$C_1=(T_2-T_1)\frac{r_1r_2}{r_2-r_1}$$ che sostituito nell'espressione di T_1 ci dà

$$C_2=T_1+\frac{(T_2-T_1)r_2}{r_2-r_1}$$

Allora la funzione che stabilisce l'andamento della temperatura all'interno della sfera cava in funzione del raggio è

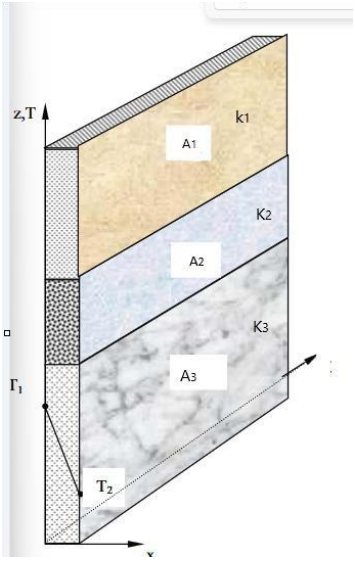
$$T(r)=-\frac{1}{r}\left[(T_2-T_1)\frac{r_1r_2}{r_2-r_1}\right]+\left[T_1+\frac{(T_2-T_1)r_2}{r_2-r_1}\right]$$ sostituendo i valori numerici si ha

$$T(r)=\frac{10}{r}+200\ K$$

Per il flusso termico usando la (7) si ha

$$P=\frac{4\pi\cdot 15\cdot 100}{\frac{1}{0.05}-\frac{1}{0.10}}=1884W$$

5. Una parete a strato singolo può essere costituita da materiali che, pur essendo omogenei ed isotropi, presentano differenti valori della conduttività termica, k_1, k_2, e k_3, come in figura. Si calcoli la potenza trasmessa, essendo la temperatura esterna T_1 e quella interna T_2.



Il flusso di calore è presente solo lungo la direzione x e sarà la somma dei tre flussi termici che attraversano la parete:

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = k_1 A_1 \frac{\Delta T}{s} + k_2 A_2 \frac{\Delta T}{s} + k_3 A_3 \frac{\Delta T}{s}$$

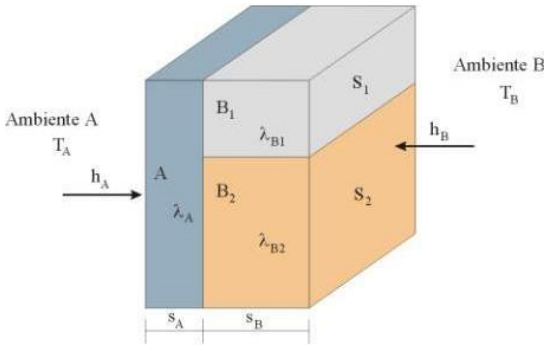
$$R_1 = \frac{s}{k_1 A_1};\ R_2 = \frac{s}{k_2 A_2};\ R_3 = \frac{s}{k_3 A_3}$$

La potenza termica trasmessa è allora

$$P = \frac{\Delta T}{R_1} + \frac{\Delta T}{R_2} + \frac{\Delta T}{R_3} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) \Delta T = \frac{\Delta T}{R_{TOT}}$$

$$\frac{1}{R_{TOT}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

6. Si consideri una parete costituita da un primo strato omogeneo A (acciaio) e da un secondo strato non omogeneo formato dall'alternarsi di due materiali (cemento B_1 e argilla espansa B_2) aventi conducibilità termica differente. Si calcoli la potenza di conduzione termica trasmessa.



Trattiamo il problema in termini di resistenze perché più agevole.

$$P = \frac{\Delta T}{R_{TOT}}$$

Resistenza dovuta allo strato A: $R_A = \frac{s_A}{k_1 S}$

Dove s_A è lo spessore dello strato A k_1 la sua conducibilità ed S la superficie della parete ($S = S_1 + S_2$).

Resistenza cumulata di B_1 e B_2 posti in parallelo: $\frac{1}{R_{2+3}} = \frac{1}{R_{B_1}} + \frac{1}{R_{B_2}}$ cioè $R_{2+3} = \frac{R_{B_1} R_{B_2}}{R_{B_1} + R_{B_2}}$

Tenendo conto che

$$R_{B^1} = \frac{s_B}{k_{B_1} S_1}; \quad R_{B^2} = \frac{s_B}{k_{B_2} S_2}$$

$$R_{2+3} = \frac{\frac{s_B}{k_{B_1} S_1} \frac{s_B}{k_{B_2} S_2}}{\frac{s_B}{k_{B_1} S_1} + \frac{s_B}{k_{B_2} S_2}} = \frac{\frac{s_B^2}{k_{B_1} S_1 k_{B_2} S_2}}{\frac{s_B k_{B_2} S_2 + s_B k_{B_1} S_1}{k_{B_1} S_1 k_{B_2} S_2}} = \frac{s_B}{k_{B_2} S_2 + k_{B_1} S_1}$$

La resistenza totale è $R_{TOT} = R_A + R_{2+3} = \frac{s_A}{k_1 S} + \frac{s_B}{k_{B_2} S_2 + k_{B_1} S_1}$

LA potenza trasmessa è $P = \frac{\Delta T}{\frac{s_A}{k_1 S} + \frac{s_B}{k_{B_2} S_2 + k_{B_1} S_1}}$

Convezione

La trasmissione di calore per convezione viene descritto dalla **legge del raffreddamento di Newton**.
La convezione termica è un insieme di fenomeni di trasporto di massa ed energia per mezzo di un fluido riscaldato (o raffreddato) dovuta ad una sommatoria di effetti che portano i fluidi a spostarsi da una zona calda ad una fredda.
La *convezione termica* è un fenomeno complesso dato da un insieme di più fenomeni apparentemente semplici: essa è il risultato del movimento di fluidi (*attivato o non da dispositivi esterni*) che trasportano (dal latino *conveho* trasporto) nel loro movimento energia termica (si pensi ad esempio ai moti convettivi dell'acqua che si riscalda in una pentola o dell'aria calda emessa da un convettore all'interno di una stanza). Si ipotizza che vi sia a contatto della superficie del contenitore e lo strato laminare di aria dove il calore si trasmette per convezione, la cui profondità è nell'ordine dei millimetri. La quantità di calore per unità di tempo che viene scambiata per convezione è descritta dalla legge empirica (detta legge di raffreddamento do Newton) Newton ebbe il grande merito di semplificare la grande complessità del problema scrivendo per la convezione termica la seguente legge:

$$P = h\,S(T_{solido} - T_{fluido}) \qquad (8)$$

Dove h è la costante di convezione, P il flusso termico scambiato con l'ambiente (fluido, a temperatura $\mathbf{T_{fluido}}$) e che **funge praticamente da termostato**, ed S è la superficie del corpo considerato attraverso la quale avviene lo scambio termico.
In termini di densità di flusso si ha

$$q = h(T_{solido} - T_{fluido}) \qquad (9)$$

Ricordando la definizione di resistenza termica si ha

$$R_{conv} = \frac{1}{hS} K/W \qquad (10)$$

Newton ha semplificato la definizione analitica di un fenomeno complesso con una semplice introduzione di un *coefficiente di convezione* noto il quale si può conoscere il flusso termico effettivamente scambiato, però a causa della complessità nella determinazione del valore numerico di **h** esso di può anche definire come un ***coefficiente di ignoranza***.
Infatti il coefficiente h non è una proprietà termofisica ma dipende da un grande numero di fattori fra i quali ricordiamo:
· le proprietà fisiche del fluido: densità ρ, viscosità dinamica μ, calore
specifico a pressione costante c_p, coefficiente di conducibilità termica k;
· la differenza di temperatura fra i corpi;
· la velocità del fluido e se vi è convezione naturale o forzata;
· la geometria della parete attraverso cui avviene lo scambio termico.

Quindi non è possibile conoscere il coefficiente di convezione dati i soli parametri fisici del fluido e le temperature di scambio: occorre specificare anche la geometria di scambio ed altri fattori, come elencato sopra, e ciò rende di fatto lo studio della convezione termica molto complesso.
Ecco alcuni valori di h che fungono da cornice al quadro di valori che il coefficiente può assumere.

Convezione naturale	*h (W/m²K)*
Gas	2 - 25
Liquidi	50 - 1000
Convezione forzata	
Gas	25 – 250
Liquidi	100 - 20000

E' utile introdurre una grandezza adimensionale R_a caratteristica del sistema in oggetto – detta numero di Rayleigh – definito come $R_a = A(T)L^3\Delta T$

Dove ΔT è la differenza di temperatura fra il corpo solido ed il fluido, L è una dimensione caratteristica del sistema e A(T) è una funzione dipendente dalle proprietà fisiche del fluido ed in particolare dalla sua temperatura media.

Ecco alcuni valori di A(T) per l'aria

T (°C)	A(T)
0	1.5
20	1.0
50	0.6
100	0.4

Risulta allora che il coefficiente di convezione h è proporzionale a una potenza del numero di Rayleigh (R_a^n). Valori tipici di n sono nell'intervallo 1/4 (per flussi laminari) a 1/3 (per flussi turbolenti) in convezione naturale.

$$h = \frac{kC}{L} R_a^n$$

dove C ed n sono costanti empiriche che dipendono dalla geometria e dalle condizioni del flusso.

Risulta altresì che è possibile correlare h a R_a attraverso una relazione empirica che coinvolge il numero di Nusselt Nu:

$Nu = C (R_a)^n$

dove C è una costante empirica che dipende dalla geometria e dalle condizioni di flusso, in definitiva è possibile esprimere h nel seguente modo:

$$h = \frac{k}{L_C} Nu \qquad (11)$$

dove L_C è (per un cilindro) il suo diametro, e k è la conducibilità del fluido.

Empiricamente N_u è legato al valore del numero di Rayleigh, in regime di convezione naturale, nel seguente modo

$$Nu = 0.59 R_a^{0.25}$$

esso risulta avere (come da letteratura), per la condizione vetro-aria, un valore compreso fra 2 e 10.

La (8) diventa quindi

$$P = h S(T_{solido} - T_{fluido}) = \frac{k\,Nu}{L_C} S(T_{solido} - T_{fluido}) \qquad (12)$$

Si tenga sempre presente che stiamo supponendo la differenza di temperatura costante (caso stazionario).

Se invece la temperatura del solido si raffredda, occorre usare il seguente approccio.

Dalla teoria è noto che il calore che un corpo cede o assorbe dall'ambiente si può scrivere in forma elementare come

$$dQ = mcdT$$

Per **i** liquidi e i solidi**,** si usa sempre il calore specifico a pressione costante (c_p) perché i cambiamenti di volume sono minimi e la pressione è tipicamente costante. Quindi si ha

$$dQ = mc_p\, dT \qquad (13)$$

questo calore è esattamente quello che nel nostro modello fluisce essenzialmente per convezione, dunque sostituendo nella (8) si ha

$$\frac{mc_p\, dT}{dt} = -hS(T_{solido} - T_{amb})$$

Ma mentre T_{amb} come già osservato è praticamente la temperatura del termostato rappresentato dall'ambiente interno del frigo, quindi avente una T = cost ed esattamente nel nostro caso: T_{amb} = 5 °C, T_{solido} è la temperatura del nostro sistema (bottiglia + birra) che va raffreddandosi, quindi è funzione del tempo T(t), allora si ha

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{hS}{mc_p}(T(t) - T_{amb}) = -K(T(t) - T_{amb}) \qquad (14)$$

Dove si è posto $K = \frac{hS}{mc_p}$ (15)

Questa è la legge di raffreddamento di Newton, che può essere applicata in determinati contesti che soddisfano specifiche condizioni. La legge afferma che il tasso di variazione della temperatura di un corpo è proporzionale alla differenza tra la sua temperatura e quella dell'ambiente circostante:
dove:

- T è la temperatura del corpo,
- T_{amb} è la temperatura dell'ambiente circostante (assunta costante),
- h è la costante di scambio convettivo (detta anche coefficiente di conducibilità esterna o di trasporto) che dipende dalle proprietà del materiale e dall'ambiente
- K è la costante di raffreddamento che dipende dipendente dalla capacita termica del sistema (mc) dalla superficie di scambio S e dal coefficiente di conducibilità h. Il segno meno indica che la temperatura del corpo diminuisce con il trascorrere del tempo.

Integriamo allora la (13) al fine di avere una legge che descriva l'andamento temporale della temperatura.

$$\int \frac{1}{T(t) - T_{amb}} dT = -K \int dt$$

$$\log|T(t) - T_{amb}| = -Kt + C$$

Dove C è la costante di integrazione.

$$|T - T_{amb}| = e^{-Kt+C} = e^{-Kt}\, e^{C}$$

Possiamo togliere il simbolo del valore assoluto in quanto stiamo considerando una differenza di temperatura positiva, e per semplificare poniamo e^C = C.

$$T(t) - T_{amb} = Ce^{-Kt}$$

Supponendo che al tempo t = 0 il corpo abbia temperatura $T_0 > T_{amb}$, determiniamo C:

$$T_0 - T_{amb} = Ce^0 = C$$

Quindi la soluzione cercata è

$$T(t) = T_{amb} + (T_0 - T_{amb})\, e^{-Kt} \qquad T_0 > T_{amb} \equiv T_{fluido} \qquad (16)$$

Rimane il problema di determinare il valore della costane di raffreddamento K, innanzitutto si introduce il suo inverso che rappresenta dunque una costante di tempo 1/K = τ (che potremmo chiamare costante di decadimento termico)

$$T(t) = T_{amb} + \Delta T\, e^{-t/\tau} \qquad (17)$$

Essendo, dalla (14): $K = \frac{hS}{mc}$ si ha

$$\tau \equiv \frac{1}{K} = \frac{mc_p}{hS} \qquad (18)$$

E' questa relazione che va usata per calcolare il tempo di raffreddamento di un corpo per convezione nel caso non stazionario.

Condizioni per l'applicazione della legge:

1. Differenza di temperatura moderata:

La legge è valida quando la differenza tra la temperatura del corpo e quella dell'ambiente circostante non è eccessiva. Per differenze di temperatura molto grandi, potrebbero entrare in gioco fenomeni come la convezione forzata o l'irraggiamento, rendendo la legge meno accurata.

2. Convezione naturale:

Il corpo perde calore principalmente per convezione naturale (cioè per il movimento naturale del fluido circostante, come aria o acqua) e non per irraggiamento o conduzione predominante.

3. Temperatura dell'ambiente costante:

La temperatura dell'ambiente circostante deve rimanere costante nel tempo, o comunque variare lentamente rispetto al processo di raffreddamento.

4. Trasferimento di calore omogeneo:

Il trasferimento di calore all'interno del corpo (conduzione interna) deve essere abbastanza rapido da garantire che la temperatura del corpo sia uniforme. In altre parole, il corpo deve essere considerato termicamente omogeneo.

5. Fluido circostante in quiete:

Il fluido intorno al corpo (ad esempio l'aria o l'acqua) deve essere in quiete o muoversi lentamente, in modo che il raffreddamento avvenga principalmente per convezione naturale e non forzata.

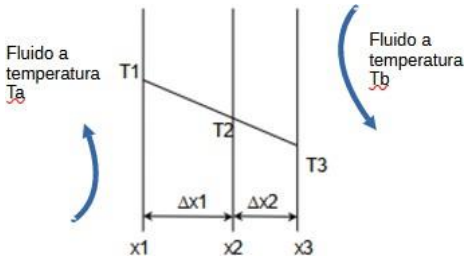
6. Trascurabilità di altri meccanismi di trasferimento di calore:

L'irraggiamento (trasferimento di calore per onde elettromagnetiche) e la conduzione attraverso un altro mezzo devono essere trascurabili rispetto alla convezione.

Esempi pratici di applicazione:
Raffreddamento di una tazza di caffè in una stanza.
Raffreddamento di un oggetto metallico esposto all'aria ambiente.
Calcolo della perdita di calore da una bottiglia di acqua calda immersa in un bagno di acqua fredda.

Alcuni esempi

1. Si abbia uno strato come in figura in cui vi è sia conduzione che convezione stazionario, si trovi l'espressione del flusso termico.



Essendo in condizione di flusso stazionario si ha che i vari flussi fra le diverse zone sono tutti uguali fra loro, cioè si ha

Flusso di scambio convettivo fra il fluido 1 e la parete 1= Flusso di scambio di conduzione nello strato Δ_1 = Flusso di scambio di conduzione nello strato Δ_2 = Flusso di scambio convettivo fra la parete 2 ed il fluido 2.

$$h_1 S(T_a - T_1) = k_1 S \frac{(T_1 - T_2)}{\Delta x_1} = k_2 S \frac{(T_2 - T_3)}{\Delta x_2} = h_2 S(T_b - T_3)$$

Con qualche semplice passaggio algebrico si arriva alla seguente espressione

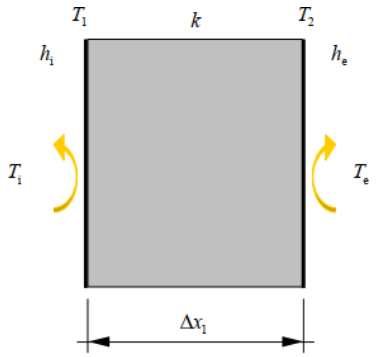
$$q = \frac{T_a - T_b}{\frac{1}{h_1 S} + \frac{\Delta x_1}{k_1 S} + \frac{\Delta x_2}{k_2 S} + \frac{1}{h_2 S}} = \frac{T_a - T_b}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} = \frac{T_a - T_b}{R_{TOT}}$$

2. Il coefficiente di trasmissione del calore per convezione forzata per un fluido caldo che scorre alla temperatura di 394 K su una superficie fredda vale 227 W/m^{2}K. Sapendo che la temperatura della superficie è 283 K, determinare il flusso termico unitario trasmesso dal fluido alla superficie.

$$P = h(T_f - T_p) = 227(394 - 283) = 25.2\,kW / m^2$$

3. Un muro di calcestruzzo spesso 15 cm, con conduttività termica k = 0.87 W/mK, è esposto dal lato interno ad aria a 25°C e dall'altro ad aria a 0°C. Il coefficiente di scambio termico convettivo per l'aria interna vale 10.46 W/m^{2}K mentre per quella esterna vale 52.3 W/m^{2}K. Determinare la densità di flusso termico e la temperatura sulle due facce del muro.

4.



$$q = \frac{P}{S} = \frac{1}{S}\frac{\Delta T}{R_{TOT}} = \frac{1}{S}\frac{T_i - T_e}{\frac{1}{Sh_i} + \frac{\Delta x}{Sk} + \frac{1}{Sh_e}} = \frac{T_i - T_e}{\frac{1}{h_i} + \frac{\Delta x}{k} + \frac{1}{h_e}} = \frac{25 - 0}{\frac{1}{52.3} + \frac{0.15}{0.87} + \frac{1}{10.46}} = 87.1 W/m^2$$

Noto il valore di q è immediato calcolare il valore della temperatura su ognuna delle due facce in quanto lo scambio termico essendo stazionario avrà lo stesso valore nei due transiti, cioè:

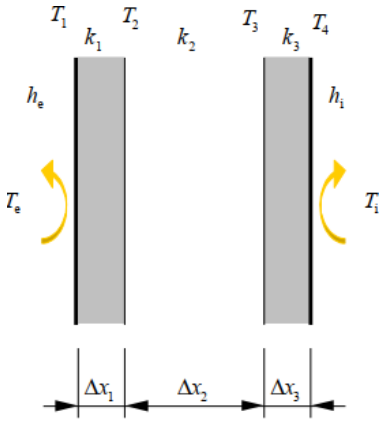
$$q = \frac{T_i - T_1}{\frac{1}{h_i}} \rightarrow T_1 = T_i - \frac{q}{h_i} = 25 - \frac{87.1}{10.46} = 16.7°C$$

$$q = \frac{T_2 - T_e}{\frac{1}{h_e}} \rightarrow T_2 = T_e - \frac{q}{h_e} = 0 - \frac{87.1}{52.3} = 1.7°C$$

4. Sia dato un muro piano costituito da uno strato di pietra ed uno di calcestruzzo, di spessore uguale e pari a 10 cm, separati da un'intercapedine d'aria di 30 cm. Il muro separa due ambienti a temperatura rispettiva di 40°C e 20°C, aventi coefficiente di scambio convettivo pari rispettivamente a 30 e 5 W/m^{2}K. Sapendo che i coefficienti di conducibilità della pietra, del calcestruzzo e dell'aria valgono rispettivamente 1.5 W/mK, 1.2 W/mK e 0.022 W/mK, determinare la densità di flusso scambiato e l'andamento della temperatura nei casi in cui:

a) l'aria non dia luogo a moti convettivi

b) l'aria dia luogo ad uno scambio per convezione con coefficiente h pari a 2.5W/m^{2}K



a) Calcoliamo la resistenza totale del sistema per unità di superficie.

$$R_{TOT} = \frac{1}{h_i S} + \frac{\Delta x_1}{k_1 S} + \frac{\Delta x_2}{k_2 S} + \frac{\Delta x_3}{k_3 S} + \frac{1}{h_e S} = \frac{1}{S}\left(\frac{1}{30} + \frac{0.1}{1.5} + \frac{0.3}{0.022} + \frac{0.1}{1.2} + \frac{1}{5}\right) = 14.29\,K/W\,m^2$$

$$q = \frac{T_e - T_i}{R_{TOT}} = \frac{40-20}{14.29} = 1.4 W/m^2$$

Per determinare T_1 e T_4 si sfrutta la convezione per l'aria esterna ed interna.

$$q = h_e (T_e - T_1) \rightarrow T_1 = T_e - \frac{q}{h_e} = 40 - \frac{1.4}{30} = 39.95°C$$

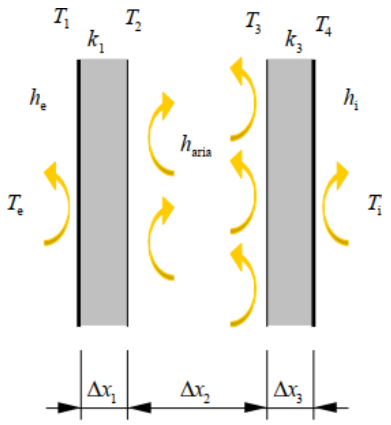
$$q = h_i (T_4 - T_i) \rightarrow T_4 = \frac{q}{h_i} + T_i = \frac{1.4}{5} + 20 = 20.28°C$$

Per determinare T_2 e T_3 si sfrutta la conduzione attraverso gli strati 1 e 3.

$$q = k_1 \frac{T_1 - T_2}{\Delta x_1} \rightarrow T_2 = T_1 - q\frac{\Delta x_1}{k_1} = 39.95 - 1.4\frac{0.1}{1.5} = 39.86°C$$

$$q = k_2 \frac{T_3 - T_4}{\Delta x_2} \rightarrow T_3 = T_4 + q\frac{\Delta x_3}{k_2} = 20.28 + 1.4\frac{0.1}{1.2} = 20.4°C$$

b) La situazione è ora illustrata dalla seguente figura.



Procediamo come nel caso precedente.

$$R_{TOT} = \frac{1}{h_e S} + \frac{\Delta x_1}{k_1 S} + \frac{1}{h_{aria}} + \frac{\Delta x_3}{k_3 S} + \frac{1}{h_i S} = \frac{1}{S}\left(\frac{1}{30} + \frac{0.1}{1.5} + \frac{1}{2.5} + \frac{0.1}{1.2} + \frac{1}{5}\right) = 0.794\, K/W\, m^2$$

$$q = \frac{T_e - T_i}{R_{TOT}} = \frac{40-20}{0.794} = 25.2\ W/m^2$$

$$q = k_1 \frac{T_1 - T_2}{\Delta x_1} \rightarrow T_2 = T_1 - q\frac{\Delta x_1}{k_1} = 39.16 - 25.2\frac{0.1}{1.5} = 37.48°C$$

$$q = k_3 \frac{T_3 - T_4}{\Delta x_3} \rightarrow T_3 = T_4 + q\frac{\Delta x_3}{k_3} = 25.04 + 25.2\frac{0.1}{1.2} = 27.6°C$$

Irraggiamento

Qualsiasi corpo con una temperatura T > 0 K emette radiazione elettromagnetica, detta radiazione termica, dovuta essenzialmente al moto di agitazione (detta appunto agitazione termica) delle cariche elettriche che compongono la materia.
A differenza della conduzione e della convezione, l'irraggiamento non ha bisogno di mezzo materiale interposto per propagarsi.
L'energia elettromagnetica assorbita da un corpo viene trasformata in energia interna e quindi in agitazione molecolare.
Si ricorderà che l'energia interna é proporzionale, tramite il calore specifico a volume costante, alla temperatura assoluto del corpo stesso e quindi si intuisce come mai l'incremento dell'energia interna porti ad incremento della temperatura del corpo.
Si sottolinea l'importanza dell'irraggiamento: é tramite questa forma di trasmissione dell'energia che il sole ci riscalda.
Lo studio dell'irraggiamento presenta aspetti matematici complessi. Qui si cercherà di semplificare al massimo tale trattazione ricordando solamente le leggi fondamentali.
Iniziamo con il dare l'espressione della potenza che una superficie S di un corpo a temperatura T (in gradi Kelvin) emette per irraggiamento:

$$P = \varepsilon S \sigma T^4 \quad (19)$$

Essa viene detta legge di Stephan-Boltzmann, dove σ è la costante di Stephan-Boltzmann σ = 5.67 x10^8 (W/m^2K^4 ed ε è il potere emissivo (o emissività) del corpo e si ha sempre ε ≤ 1. Quando ε = 1 il corpo viene detto corpo nero, altrimenti corpo grigio.
L'intensità (nel caso della radiazione si preferisce usare questa parola al posto di densità di flusso, quindi al posto della lettera q usata precedentemente ora useremo la lettera I) si ha:

$$I = \varepsilon \sigma T^4 \quad (20)$$

Ad esempio un corpo con emissività di 0.8 e temperatura di 1200 K emette una energia per ogni metro quadrato della sua superficie e per ogni secondo pari a

$$I = \varepsilon \sigma T^4 = 0.8 \cdot 5.67 \cdot 10^8 \cdot 1200^4 = 9.4 \cdot 10^4 W/m^2$$

Ora consideriamo che lo stesso corpo che emette radiazione termica è in grado anche di assorbirla, e se il bilancio energetico non è in parità può riscaldarsi o raffreddarsi. Vediamo meglio queste due caratteristiche di ogni corpo.

<u>*Coefficiente di assorbimento a:*</u> indica la frazione della radiazione incidente che un corpo assorbe. Può assumere valori da 0 (nessuna radiazione assorbita) e 1 (tutta la radiazione assorbita).

Un oggetto nero opaco ha a = 1, mentre un oggetto perfettamente riflettente ha a = 0.

<u>*Emissività ϵ*</u>: indica l'efficienza con cui un corpo emette radiazione termica rispetto a un corpo nero ideale che ha una emissività pari ad 1 (un corpo nero è un oggetto teorico che assorbe e riemette tutta la radiazione incidente che rappresenta la massima radiazione possibile a una data temperatura). Anche l'emissività varia tra 0 e 1.

La legge di Kirchoff per la radiazione termica afferma che, per un corpo in equilibrio termico con il suo ambiente a una data lunghezza d'onda e temperatura:

$$a(\lambda, T) = \varepsilon(\lambda, T)$$

In altre parole: se un corpo assorbe bene la radiazione incidente su di esso (alto valore di a), sarà anche un buon emettitore (alto valore di ϵ).

Un corpo che riflette o trasmette la maggior parte della radiazione (basso valore di a) sarà anche un cattivo emettitore (basso valore di ϵ).

Questa uguaglianza si applica in condizioni di equilibrio termico radiativo, ma potrebbe non valere esattamente se ci sono condizioni particolari (es. differenze nella lunghezza d'onda della radiazione incidente ed emessa).

I valori dei coefficienti di emissività e assorbività dei materiali usati nei calcoli ingegneristici sono normalmente i valori mediati sullo spettro, riferiti alla radiazione solare e a una temperatura di riferimento dell'oggetto. Questi valori (di assorbività ed emissività) appunto perché non sono riferiti ad una sola lunghezza d'onda possono variare sensibilmente fra loro, come si vede dalla seguente tabella.

Materiale della superficie	a_s	ε
Asfalto	0,90	0,90
Calcestruzzo	0,60	0,88
Laterizio	0,63	0,93
Marmo bianco	0,46	0,95
Neve	0,28	0,97
Pelle umana	0,62	0,97
Vernice bianca	0,14	0,93
Vernice nera	0,97	0,97

Occorre però tenere presente che un corpo di una data emissività non emette isotropicamente.

La radiazione emessa da un corpo non è sempre isotropica, cioè non viene distribuita uniformemente in tutte le direzioni dello spazio. Questo comportamento dipende da diversi fattori, come la geometria del corpo, le sue proprietà superficiali e la sua temperatura. Vediamo nel dettaglio:

- Geometria del corpo:

Se il corpo ha una forma irregolare, come una superficie curva o un angolo, la radiazione emessa in direzioni diverse può variare a seconda dell'orientamento locale della superficie. Ad esempio, una superficie piana irradierà in maniera più intensa perpendicolarmente alla sua area rispetto a direzioni oblique.

- Emissività direzionale:

La radiazione emessa varia con l'angolo rispetto alla normale alla superficie. Superfici come i metalli lucidi tendono a emettere radiazione in direzioni preferenziali a causa delle loro proprietà di riflessione e della struttura microscopica.

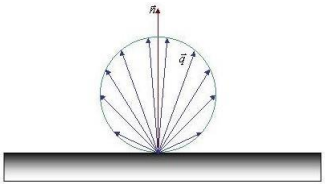
- Polarizzazione e materiali anisotropi:

Se il materiale è anisotropo (ha proprietà che cambiano con la direzione), la radiazione sarà più intensa in certe direzioni. Ad esempio, materiali cristallini possono emettere più radiazione lungo alcune direzioni dei loro assi cristallini.

Per molte superfici ideali**,** l'intensità della radiazione segue la legge di Lambert:

$$I(\theta) = I_0 \cos\theta$$

Dove I_0 è l'intensità massima della radiazione nella direzione normale alla superficie ($\theta = 0$).



Per quanto riguarda l'assorbimento di un corpo per irraggiamento, vale la seguente relazione

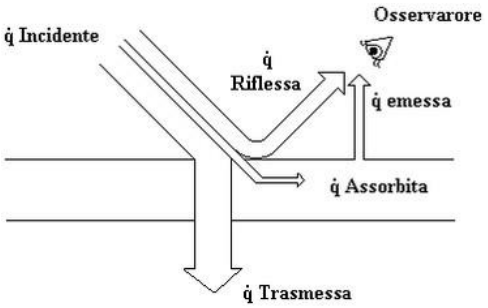
$$P_{ass} = a S I_0$$

Dove a è il coefficiente di assorbimento (che misura la frazione di energia incidente che il corpo assorbe, esso dipende dalla natura del materiale e dalla lunghezza d'onda della radiazione), S la superficie del corpo e I_0 è l'intensità (o densità di flusso) della radiazione incidente.

Dunque per un corpo che si trova in equilibrio termico, la potenza assorbita è uguale alla potenza emessa, avendosi:

$$P_{emessa} = P_{assorbita}$$
$$aSI_0 = \varepsilon\sigma ST^4$$

Tutti i corpi dunque emettono radiazione, ed abbiamo visto con quale potenza emettono, ma cosa accade ad un corpo che riceve radiazione? Nel caso generale l'energia raggiante entrante di divide in tre componenti; assorbita, riflessa e trasmessa, come mostrato nella seguente figura.



Per la conservazione dell'energia, facendo riferimento alla radiazione incidente, vale la seguente relazione

$$I_{inc} = I_a + I_r + I_t$$

Dove il pedice a indica la densità di flusso assorbita, il pedice r quella riflessa ed il pedice t quella trasmessa.

Se dividiamo per I_{inc}, vengono definiti i tre coefficienti di assorbimento, di riflessione e trasmissione.

$$\frac{I_a}{I_{inc}} + \frac{I_r}{I_{inc}} + \frac{I_t}{I_{inc}} = 1 \qquad \rightarrow \qquad a + r + t = 1$$
$$\frac{I_a}{I_{inc}} = a; \frac{I_r}{I_{inc}} = r; \frac{I_t}{I_{inc}} = t$$

Un corpo (ideale) che non riflette nulla viene detto corpo nero e quindi sarà caratterizzato dal fatto che assorbirà tutta la radiazione incidente ed emetterà quindi esattamente quello che assorbe.

La radiazione riflessa rappresenta l'energia che il corpo non scambia con l'ambiente attraverso assorbimento o emissione, ma viene semplicemente deviata dalla sua superficie. Essa dipende fortemente dalle proprietà superficiali e ottiche del materiale, come:

Indice di rifrazione: governa il comportamento della luce incidente, influenzando il rapporto tra la riflessione speculare e quella diffusa.

Conduttività elettrica: nei materiali metallici, una conduttività elevata porta a una riflettività alta.

Rugosità superficiale: superfici più rugose tendono a diffondere la radiazione riflessa in più direzioni.

Altresì anche la radiazione trasmessa non partecipa allo scambio di calore con l'ambiente, poiché essa attraversa il corpo senza interagire (né assorbita né riflessa).

Ribadiamo ancora che lo scambio di calore per irraggiamento riguarda solo la porzione di energia assorbita ed emessa dal corpo, ed è descritto dalla emissività :

- Assorbimento: Il corpo assorbe una frazione *a* della radiazione incidente.
- Emissione: Il corpo emette radiazione secondo la legge di Stefan-Boltzmann, proporzionalmente alla sua emissività ε.

La relazione (19) può essere estesa al caso di due corpi neri, aventi temperatura T_1 e T_2, introducendo un parametro che tiene conto di quanta energia intercettano "visivamente" le due superfici in base alla loro disposizione spaziale, avendosi

$$P = \sigma S F_{1,2} (T_1^4 - T_2^4)$$

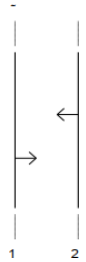
Dove $F_{1,2}$ viene detto fattore di forma (o di vista). La valutazione di F nei vari casi concreti è abbastanza complesso per cui lo omettiamo.

Si tenga presente che lo scambio radiativo fra due o più corpi neri é problema di non facile soluzione tranne in casi e geometrie semplici per altro abbastanza comuni nella realtà.

Quando due corpi hanno temperature diverse, si verifica uno scambio radiativo. Il corpo più caldo emette più energia di quanta ne riceva, mentre il corpo più freddo riceve più energia di quanta ne emetta. Questo scambio continua fino a quando i due corpi raggiungono l'equilibrio termico, ovvero la stessa temperatura. A quel punto, entrambi i corpi emettono e assorbono la stessa quantità di energia.

Diamo solo l'espressione della potenza termica scambiata per irraggiamento per tre geometrie semplici.

1. Due superfici grigie (cioè abbiano emissività indipendente dalla lunghezza d'onda) , piane e parallele con stessa superficie, con emissività ε_1 ed ε_2, e temperatura T_1 e T_2:



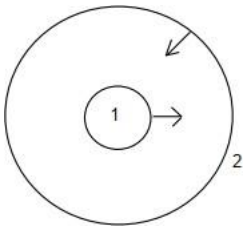
$$P = \frac{\sigma S (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1} \qquad (21)$$

Per superfici "nere" ossia con emissività pari ad uno si ha

$$P = \sigma S (T_1^4 - T_2^4)$$

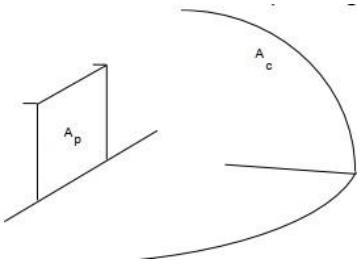
Il segno positivo di P indica che $T_1 > T_2$ e viceversa.

2. Due superfici cilindriche o sferiche concentriche, come indicato nella seguente figura



$$P = \frac{\sigma A_1 (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{A_1}{A_2}\left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1\right)}$$

3. Una superfice di una parete che irradia verso l'ambiente esterno.



$$P = A_p \varepsilon_p \sigma (T_p^4 - T_a^4)$$

Non ci addentriamo oltre questa complessa modalità di trasmissione del calore.

Alcuni esempi

1. L'intensità (densità di flusso) solare sulla superficie della Terra in estate a mezzogiorno è circa 1000 W/m^2, ipotizzando che la pelle esposta al sole sia circa 1 m^2 e che il coefficiente di assorbimento sia 0.8, calcolare quanta energia per ogni secondo riceve una persona.

$$P = a\,S\,P_{incidente} = 0.7 \cdot 1 \cdot 1000 = 700\ W$$

2. Un tetto di 10 m^2, in inverno ha una temperatura di 20 °C ed una emissività di 0.8, calcolare la potenza emessa.

$$P = \varepsilon\sigma\,ST^4 = 0.8 \cdot 5.67 \cdot 10^{-8} \cdot 10 \cdot 293^4 = 3340W$$

3. Su di un corpo di superficie S = 2 m^2 e coefficiente di assorbimento a = 0.8, incide una radiazione avente intensità I_0 = 500 W/m^2, qual è la potenza assorbita?

$$P_{ass} = a\,S\,I_0 = 0.8 \cdot 2 \cdot 500 = 800W$$

4. Qual è la temperatura di un corpo, avente emissività 0.9, che emette una intensità di 1000 W/m^2?

$$I = \frac{P}{S} \equiv 1000 = \varepsilon\sigma T^4$$

$$T = \sqrt[4]{\frac{1000}{0.9 \cdot 5.67 \cdot 10^{-8}}} = 374\,K$$

5. Un corpo (più freddo rispetto all'ambiente) avente superficie di 1.5 m^2, una emissività di 0.4 ed un coefficiente di assorbimento di 0.7, ha una temperatura di 300 K. Su di esso incide una radiazione di intensità di 1000 W/m^2. Si calcoli il bilancio termico.

$$P_{ass} = aSI_0 = 0.7 \cdot 1.5 \cdot 1000 = 1050W$$

$$P_{emessa} = \varepsilon\sigma\,ST^4 = 0.4 \cdot 1.57 \cdot 10^{-8} \cdot 1.5 \cdot 300^4 = 276W$$

Il corpo sta dunque riscaldandosi, assorbendo radiazione termica con potenza di 774 W.

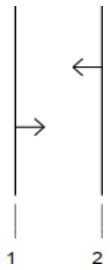
6. Un corpo (più caldo rispetto all'ambiente) con le stesse caratteristiche del problema precedente, abbia ora una temperatura di 400 K. Si calcoli il bilancio termico

$$P_{ass} = aSI_0 = 0.6 \cdot 1.5 \cdot 1000 = 900W$$

$$P_{emessa} = \varepsilon\sigma\,ST^4 = 0.9 \cdot 5.67 \cdot 10^{-8} \cdot 1.5 \cdot 400^4 = 1959W$$

Il corpo sta dunque raffreddando, emettendo radiazione termica con potenza di 1059 W.

7. Qual è l'energia scambiata fra due corpi grigi piani paralleli con identica superficie, con emissività di 0.9 e 0.7, aventi temperatura T_1 = 400 K e T_2 = 300 K?



$$I = \frac{\sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1} = \frac{5.67 \cdot 10^{-8} \cdot (400^4 - 300^4)}{\frac{1}{0.9} + \frac{1}{0.7} - 1} = 644 W / m^2$$

Il valore positivo di I indica che il flusso termico netto va dal corpo a temperatura T_1 (400 K) al corpo a temperatura T_2 (300 K), come ci si aspetta quando $T_1 > T_2$. In altre parole, il corpo a 400 K sta emettendo più energia di quanta ne assorbe, mentre il corpo a 300 K sta assorbendo più energia di quanta ne emette.

Ribadiamo che il valore di 644 W/m² rappresenta l'intensità netta scambiata tra le due superfici piane e parallele con stessa superficie. Questo è il flusso netto di energia per unità di superficie che passa dal corpo più caldo (400 K) al corpo più freddo (300 K) a causa della differenza di temperatura e delle proprietà emissive dei due corpi.

Il corpo 1 assorbe più energia di quanta ne emetta (1045.09 W/m² > 321.49 W/m²). Di conseguenza, la sua temperatura aumenterà fino a raggiungere un nuovo equilibrio termico in cui l'energia emessa e quella assorbita si equivalgono (e l'emissività sarà uguale all'assorbività). La temperatura finale dipenderà anche da come il corpo 1 può dissipare il calore in eccesso, ad esempio per conduzione o convezione, oltre che per irraggiamento.

Tempo di raffreddamento di una birretta messa in frigo

Supponiamo di mettere il frigo una bottiglia di vetro che assimiliamo ad un cilindro con raggio di base interno r = 2.2 cm, raggio di base esterno R = 2.5 cm ed altezza L = 22 cm (avente quindi uno spessore di s = 0.3 cm), ed inoltre supponiamo la densità della bitta sia uguale a quella dell'acqua (in realtà è di poco superiore).

La birra si trova a temperatura ambiente di T_1 = 20 °C e viene messa in frigo a T_2 = 5 °C.

Quanto tempo impiega per portarsi all'equilibrio con la temperatura del frigo?

conducibilità termica del vetro: k =1 W/mK

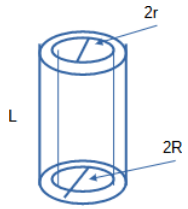
calore specifico dell'acqua/birra: c_a = 4186 J/kg K

calore specifico vetro: c_v = 837 J/K

densità dell'acqua/birra: d_a = 1000 kg/m^3

densità del vetro: d_v = 2400 kg/m^3

conducibilità aria: k_{aria}= 0.026 W/mK



Con i dati del problema abbiamo:

$$V = \pi r^2 L = \pi \cdot 0.022^2 \cdot 0.22 = 0.00033 m^3 = 0.33 cl$$

La superficie è

$$S = S_{laterale} + S_{base} = 2\pi r \cdot L + 2\pi r^2 = 2\pi \cdot 0.022 \cdot 0.22 + 2\pi \cdot 0.022^2 = 0.0334\, m^2$$

Massa della birra: $m_b = \rho V = 1000 \cdot 0.00033 = 0.33 kg$

Massa del vetro: $m_v = d_{vetro} V_{vetro} = d_{vetro} \cdot S \cdot s = 2400 \cdot 0.033 \cdot 0.003 = 238\, g$

essendo lo spessore: s = 3 mm.

Innanzitutto vediamo quali siano i principali meccanismi di trasferimento di calore da considerare.

I. *Convezione nell'aria del frigorifero*:

Il calore si trasferisce dalla superficie della bottiglia all'aria circostante attraverso convezione forzata o naturale.

Nel frigorifero, l'aria fredda circola a causa del ventilatore (convezione forzata), favorendo il trasferimento di calore dalla bottiglia.

II. Conduzione termica nella parete della bottiglia:

Il calore si trasferisce attraverso il materiale della bottiglia (vetro, plastica, o altro) dalla sua superficie interna, a contatto con l'acqua calda, alla superficie esterna, che è a contatto con l'aria fredda.

III. *Convezione interna nel liquido*:

All'interno della bottiglia, il liquido trasferisce calore per convezione naturale a causa del gradiente termico: le parti più calde dell'acqua tendono a salire, mentre quelle più fredde scendono.

IV. *Scambio radiativo*:

Una piccola quantità di calore può essere trasferita tramite radiazione termica tra la superficie della bottiglia e le pareti interne del frigorifero, anche se questo effetto è generalmente trascurabile rispetto alla convezione.

V. *Conduzione termica attraverso la superficie d'appoggio*:

Se la bottiglia è appoggiata su una superficie (come una griglia o un ripiano del frigorifero), il calore può essere trasferito per conduzione dalla base della bottiglia al ripiano, se quest'ultimo è più freddo.

Fattori che influenzano il trasferimento di calore:

Materiale della bottiglia: Vetri e plastiche hanno diverse conducibilità termiche.

Spessore della bottiglia: Un maggiore spessore riduce la velocità di conduzione.

Differenza di temperatura fra il liquido ed l’aria del frigorifero.

Velocità dell'aria nel frigorifero (efficienza del ventilatore).

In sintesi:

Il raffreddamento della bottiglia è il risultato combinato di convezione (nell'aria e nell'acqua), conduzione (attraverso la bottiglia) e, in misura minore, scambio radiativo.

Supponiamo che il trasferimento di calore avvenga principalmente per conduzione.

1. Calcolo dell'energia termica (calore) che si "trasferisce" dalla birra all'ambiente interno del frigo, affinché la sua temperatura scenda fino a 5 °C.

   Il calore che una massa di una certa sostanza deve cedere all'ambiente per raffreddarsi, o che deve acquistare per riscaldarsi, è data dalla (13):

   $$Q = mc_p(T_{finale} - T_{iniziale}) = mc_p\,\Delta T$$

   Dove m è la massa, "c" il calore specifico a pressione costante e ΔT è la differenza di temperatura fra il corpo e l'ambiente (ossia fra la bottiglia di birra e aria del frigo).
   Con i dati del problema si ha che il calore ceduto dalla bottiglia all'aria del frigo è (in modulo)

   $$Q = 0.33 \cdot 4186 \cdot 15 = 20.7 \cdot 10^3\, J \qquad (22)$$

2. Calcolo del flusso di calore per conduzione

   Se s = R – r << r, cioè lo spessore dello strato cilindrico è piccolo rispetto al suo raggio interno, come in effetti è nel nostro caso, allora la relazione (6) valida per una geometria cilindrica, si semplifica nel seguente modo

   $$P = k\,S_{lat}\,\frac{T_1 - T_2}{s} \quad (T_1 > T_2)$$

   Dove S_{lat} è la superficie laterale del cilindro, in pratica se lo spessore dello strato cilindrico è piccolo esso si comporta come se fosse una parete piana.
   Inserendo i valori numerici

   $$P = 1.0 \cdot 0.03\,\frac{20 - 5}{0.003} = 150\ W \qquad (23)$$

Concludendo

Conoscendo "la velocità" con la quale il calore "fugge" dalla birra, ossia il suo flusso (energia per unità di tempo, ossia la potenza), e conoscendo anche la quantità totale di calore che deve essere smaltita dalla birra per raffreddarsi è possibile calcolare il tempo occorrente per il raffreddamento.

$$t = \frac{Q}{P} = \frac{20.7 \cdot 10^3\,(J)}{150\,(J/s)} = 138\,s \simeq 2\,\text{min} \qquad (24)$$

Quindi se ipotizziamo che lo scambio termico avvenga esclusivamente per conduzione il tempo di raffreddamento risulta di circa 2 minuti.

Ma…
se consideriamo che il processo di raffreddamento non è stazionario, e che la trasmissione del calore non avviene principalmente per conduzione ma per convezione, le cose cambiano di molto.

La differenza di temperatura fra la birra e l'aria interna del frigo a 5 °C non è costante, quindi il calcolo di P è sbagliato, perché ΔT non ha un valore univoco, costante appunto, durante tutto il processo. In sostanza avviene che diminuendo la differenza di temperatura tra birra e aria del frigo diminuisce anche il flusso termico scambiato e quindi il fenomeno non è stazionario, cioè il flusso termico non è costante e questo cambia sostanzialmente le carte in tavola.
Quindi il calcolo di P fatto nella (23) è sbagliato. Come sbagliato sarebbe usare la (8) che va usata solo in caso di stazionarietà. Infatti si avrebbe.

Premettendo che le indicazioni tipiche per h sono:

- Convezione naturale in aria (a bassa velocità): h varia generalmente tra 2 e 25 W/m^{2}K.
- Convezione forzata in aria (con ventola): h può salire a valori tra 10 e 50 W/m^{2}K, a seconda della velocità dell'aria.

Tenendo conto che nei frigoriferi è presente una ventola, è lecito prendere per h il valore medio di 30 W/m^{2}K.

$$P = hS\Delta T = 30\cdot 0.03\cdot 15 = 13.5W \quad (26)$$

$$t = \frac{Q}{P} = \frac{20.7\cdot 10^3\,(J)}{13.5(J/s)} = 1533\,s$$

$$t = 25\text{min} \quad (27)$$

Occorre dunque usare la (18).

$$\tau \equiv \frac{1}{K} = \frac{(mc_p)_{sistema}}{hS}$$

Con i seguenti valori dei calori specifici, rispettivamente per il vetro e la birra:
c_v = 837 J/kg K c_b = 4186 J/kg K, e assumendo per h il valore 30 (W/m^{2}K), si ha:

$$\tau = \frac{m_v c_v + m_b c_b}{hS} = \frac{0.238\cdot 837 + 0.33\cdot 4186}{30\cdot 0.0334} = \frac{1580}{0.19} = 1576\,s = 26\,\text{min} \quad (28)$$

Ritenendo che il tempo di raffreddamento (che ha un andamento asintotico) si concluda dopo un tempo di 5 τ, con questo modello di calcolo si avrebbe la birra fresca dopo

t = 5 τ = 2.2 h (29)

Si tenga presente che questo modello è anch'esso approssimativo in quanto non tutta la birra è a contatto con il vetro del contenitore, pertanto il raffreddamento non è omogeneo (punto 4 delle condizioni per l'applicazione della legge), inoltre sulla superficie esterna del contenitore si forma una pellicola di aria che ha senz'altro una temperatura maggiore di 5 °C.

Siamo dunque arrivati alla conclusione che questo problemino, all'apparenza banale, non ha una soluzione semplice ed immediata a causa della presenza della costante convettiva che non è di semplice determinazione, come abbiamo visto. Per procedere in modo sensato si dovrebbe "prima" valutare il valore di h sperimentalmente, cioè misurando come decresce la temperatura con il trascorrere del tempo…ma a quel punto, non ci servirebbe più fare alcun calcolo!

Si potrebbe, infatti, calcolare K (costante di decadimento) ad esempio misurando in tempo occorrente affinché la temperatura del liquido scenda dell'80% rispetto al ΔT, ossia fino a 8 °C, realisticamente da esperienze fatte tale tempo è dell'odine dei 40 min (2400 s),

$$T(t^*) = 8°C = 5°C + \Delta T e^{-Kt^*};\ 3 = \Delta T e^{-Kt^*};\ e^{-Kt^*} = 0.2;\ -Kt^* = \log 0.2 = -1.6$$

Usare i gradi Celsius o Kelvin è indifferente.

$$K = \frac{1.6}{2400} = 0.37 \cdot 10^{-3} s^{-1}$$

$$\tau = \frac{1}{K} = 1500\, s = 25\,\text{min}$$

quindi il tempo di raffreddamento sarebbe

t = 5 τ = 2.1 h (31

Infine si potrebbe usare un approccio diverso facendo riferimento alle equazioni del transito termico considerando due aspetti:

- La convezione esterna con l'aria in termini di resistenza termica
- la convezione all'interno della bottiglia in termini di resistenza termica

Ci riferiamo alla situazione descritta sopra di una bottiglietta schematizzata come un cilindro di vetro (con spessore di 3 mm) avente raggio di base di 2.2 cm ed altezza 22 cm, quindi con volume V = 33 cl, superficie S = 0.0334 m^2, massa della birra m_b = 0.33 kg (avendo assunto la densità della birra uguale a quella dell'acqua), massa del vetro m_v = 0.238 kg, ed inoltre usiamo per h il valore usato sopra, h = 30.

Richiamiamo il concetto di resistenza termica: esso è la capacità di un materiale di opporsi al flusso di calore che tende ad attraversarlo.
Ricordando che
la conduzione: si riferisce al trasporto di calore attraverso un materiale solido o tra solidi in contatto diretto fra loro, essa avviene anche nei liquidi o gas ma in questi casi il loro contributo è molto basso,
la convezione: riguarda il trasporto di calore tra una superficie solida e un fluido (gas o liquido) in movimento oppure in quiete, riportiamo le formule della resistenza termica nei due casi.
Nel caso della conduzione:

$$R_{conduzione} = \frac{\Delta x}{kS} \quad (32)$$

Dove Δx è lo spessore del materiale attraverso il quale avviene lo scambio termico e k è la conducibilità termica del materiale, mentre S è l'area attraverso la quale avviene lo scambio termico.

Mentre nel caso della convezione si ha

$$R_{convezione} = \frac{1}{hS} \quad (33)$$

Dove h il coefficiente di scambio convettivo ed S è l'area attraverso la quale avviene lo scambio termico.

Useremo dunque un approccio basato sul seguente risultato, noto dalla teoria:

$$\tau = RC \quad (34)$$

Che ci dice che il tempo di decadimento termico è pari al prodotto della resistenza termica del sistema (birra + vetro), per la sua capacità termica che abbiamo calcolato più sopra (C = 1580 J/K).

Occorre dunque calcolare R che è la somma di tre contributi: la resistenza convettiva introdotta dalla superficie della bottiglia con l'aria del frigo, la resistenza convettiva all'interno del liquido stesso, ed infine anche la resistenza di conduzione introdotta dalla presenza della "parete" di vetro della bottiglia con l'aria all'interno del frigo. Come vedremo il termine preponderante è lo scambio convettivo "esterno" alla bottiglia. Useremo per il valore di h fra l'aria del frigo e la birra useremo il valore di 500 W/m^2K - dalla letteratura si evince che i valori del coefficiente convettivo per l'acqua (che assumiamo uguale a quello della birra) sono compresi fra 500 e 10 000 W/m^2K -.

Resistenza convettiva all'interno del liquido:

$$R_{convezione} = \frac{1}{h_{birra} S} = \frac{1}{500 \cdot 0.030} = 0.067 \ K/W \quad (35)$$

Resistenza convettiva esterna fra superficie di vetro della bottiglia e l'aria del frigo:

$$R_{convezione} = \frac{1}{hS} = \frac{1}{30 \cdot 0.0334} = 0.998 \ K/W \quad (36)$$

Resistenza termica per conduzione introdotta dalla presenza della "parete" di vetro della bottiglia:

$$R_{conduzione} = \frac{\Delta x}{k_{vetro} S} = \frac{0.003}{1.0 \cdot 0.0334} = 0.089 \, K/W \quad (37)$$

(essendo la conducibilità del vetro k_{vetro} = 1 W/mK)

La costante di tempo vale

$$\tau = RC = (0.067 + 0.998 + 0.089) \cdot 1580 = 1823 s = 30 \min$$

Il tempo di raffreddamento valutato da questa analisi è

t = = 5 τ = 2.5 h (38)

Dopo questo excursus possiamo alfine affermare che la nostra birretta si raffredderà in un tempo di circa 2 ore e mezza.

Per sottolineare ulteriormente che l'aspetto predominante è quello convettivo possiamo ricorrere ad un parametro indicatore detto numero di Biot definito come $Bi = \frac{R_{conduttiva}}{R_{convettiva}}$, nel nostro caso vale

$$Bi = \frac{0.089}{0.067 + 0.98} = 0.084$$

Se il numero di Biot, è molto minore di 1, si può ritenere che la resistenza conduttiva sia trascurabile rispetto a quella convettiva, e questo è proprio quello che accade nel nostro caso.

Verifichiamo infine che lo scambio termico per irraggiamento è trascurabile, assumendo che lo scambio avvenga fra due superfici piane e parallele

$$q = \frac{\sigma S (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1}$$

Assumendo per l'emissività dell'aria e del vetro un valore rispettivamente di 0.01 e 0.8, per S il valore già calcolato di S = 0.0334 m^2, si ha che potenza scambiata per unità di area (densità di flusso che la parete del frigo riceve dalla bottiglia.) è

$$q = \frac{5.67 \cdot 10^{-8} \cdot (293^4 - 278^4)}{\frac{1}{0.01} + \frac{1}{0.8} - 1} = \frac{79.2}{100.25} = 0.79 W / m^2$$

Confermando che effettivamente è corretto trascurare lo scambio termico per irraggiamento.

Questo problema mostra come pur conoscendo le equazioni che regolano un certo fenomeno fisico, spesso questo non è sufficiente per calcolare in modo dettagliato certe grandezze a causa della presenza nelle equazioni di parametri fenomenologici i cui valori dipendono dalla particolare configurazione geometrica e fisica del sistema.